

## §3. Riemann-Roch

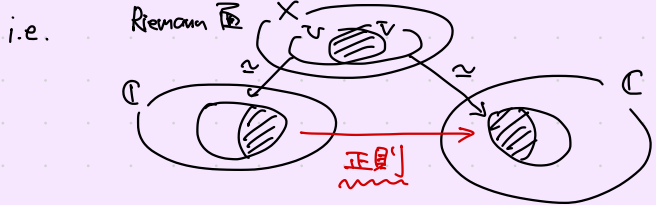
### III. §3. Riemann-Roch 自次

---

- ① 次の (i.e. Riemann 面における) Riemann-Roch の概説
- ① 1章の  $K_R$  とがE素点の言葉で翻訳する
- ① Euler 標数  $\chi$  の対応物をつくる + 性質
- ① 次数  $\deg$  の対応物をつくる
- ① プレ Riemann-Roch みたいなやつを述べる.
- ① 次元  $l$  の対応物をつくる
- ① 種数  $g$  の対応物をつくる
- ① Riemann-Roch 1 の類似を述べる.
- ① Serre duality の類似を述べる. ← 激ヤバ
- ① 特殊指数  $i$  (補正項) をつくる
- ① Riemann-Roch 2 の類似を述べる.
- ① 標準束  $\omega$  (標準因子  $K$ ) の対応物をつくる.
- ① Riemann-Hurwitz の公式の類似を述べる.

① 補足: 以下の Riemann-Roch

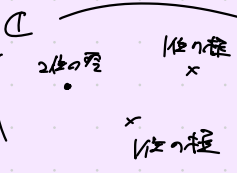
o Riemann 面 = 複素 1-次元多様体



e.g.  $\mathbb{C}P^1$ : Riemann 球面 とか ... = いろいろ.

興味があること: 多項式/多項式

- ①  $X$  上に 有理関数 はどのくらいあるか?
- ②  $X$  上に 極を許す / 極を強制する とし、  
有理関数 はどのくらい増減するか?



$\hookrightarrow \circ \mathcal{O}_X(D)(X) = \{ D \text{ で指定しただけ極を許す/極を強制するときの } X \text{ 上の有理関数} \}$

$\circ \ell(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(D)(X)$   
 $= \lceil D \text{ で指定しただけ極を許す/極を強制するときの } X \text{ 上の有理関数の量} \rceil$

- たとえば  $X = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  球面.
- $\circ X$  上の正則関数は定数のみ. ( $\because$  Liouville)  $\rightarrow \mathcal{O}_X(0)(X) = \mathbb{C}$   
 $\ell(0) = 1.$
- $\circ$  有理関数  $f$  について.  $\sum (f \text{ の極の位数}) = \sum (f \text{ の零の位数})$

Thm. (Riemann-Roch) RR2  $\swarrow$  cpe Riemann 面

$x(\mathcal{O}_X(D)) \stackrel{SD}{=} \ell(D) - \ell(K-D) \stackrel{RR1}{=} \deg D + 1 - g$

Euler-Poincare 標数      標準因子 (微分形式に対す)      許す極 - 強制する零      種数 ( $X$  に付したとき定数)

$\rightarrow$  極をひとつ許すと有理関数はだいたい 1次元増える.

数体においてこの類似が成立する.  $\leftarrow$  为什么呢か. それは.

② 観察と素点への翻訳

$\rho: \text{実埋込 } K \hookrightarrow \mathbb{R} \xleftrightarrow{\text{対立}} \gamma: \text{実素点 } \rho_\gamma: K_\gamma \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$

$\sigma, \bar{\sigma}: \text{虚埋込 } K \hookrightarrow \mathbb{C} \xleftrightarrow{\text{対立}} \gamma: \text{虚素点 } \sigma_\gamma: K_\gamma \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc}
 a \otimes x & \mapsto & ((\tau a)x)_\tau \\
 K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} & \xrightarrow{\cong} & K_{\mathbb{R}} = \prod_{\rho \text{ real embed.}} \mathbb{R} \times \prod_{\sigma \text{ comp. embed. (conj. pair)}} [\mathbb{C} \times \mathbb{C}]^+ \\
 \parallel & & \uparrow \text{今から同視.} \\
 K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\gamma \neq 100} K_\gamma = \prod_{\gamma: \text{real}} K_\gamma \times \prod_{\gamma: \text{comp.}} K_\gamma \\
 a \otimes x & \mapsto & ((\tau a)x)_{\gamma \neq 100} \text{ w/ } \tau_\gamma: K \hookrightarrow K_\gamma
 \end{array}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle, \mu, \log$   
 翻訳 どうなる?  
 ?

(1) 上の行の文脈で定義されていた  $\langle x, y \rangle = \sum_{\tau} x_{\tau} \overline{y_{\tau}}$  は

下の行の文脈に翻訳すると、 $x, y \in \prod_{\gamma \neq 100} K_\gamma$  に対して

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\gamma: \text{real}} x_{\gamma} y_{\gamma} + \sum_{\gamma: \text{comp.}} (x_{\gamma} \overline{y_{\gamma}} + \overline{x_{\gamma}} y_{\gamma})$$

(2) 上の行の文脈で定義されていた  $\mu: \text{Haar 測度 on } K_{\mathbb{R}}$  は

下の行の文脈に翻訳すると、積測度  $\mu = \prod_{\gamma \neq 100} \mu_{\gamma}$

$$\mu_{\gamma} = \begin{cases} K_{\gamma} = \mathbb{R} \text{ 上の Lebesgue 測度} & \text{if } \gamma: \text{real} \\ K_{\gamma} = \mathbb{C} \text{ 上の Lebesgue 測度の 2 倍} & \text{if } \gamma: \text{complex} \end{cases}$$

(3) 上の行の文脈で定義されていた

$$\ell: [\prod_{\tau} \mathbb{C}^*]^+ \longrightarrow [\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+ ; x \mapsto (\log |x_{\tau}|)_{\tau} \quad \text{if}$$

下の行の文脈に翻訳すると、

$$\ell: \prod_{\gamma \neq 100} K_{\gamma}^* \longrightarrow \prod_{\gamma \neq 100} \mathbb{R} ; x \mapsto (\log |x_{\gamma}|)_{\gamma}$$

② Euler 標数  $\chi$  の対応期をつくる.

Def. 3.1

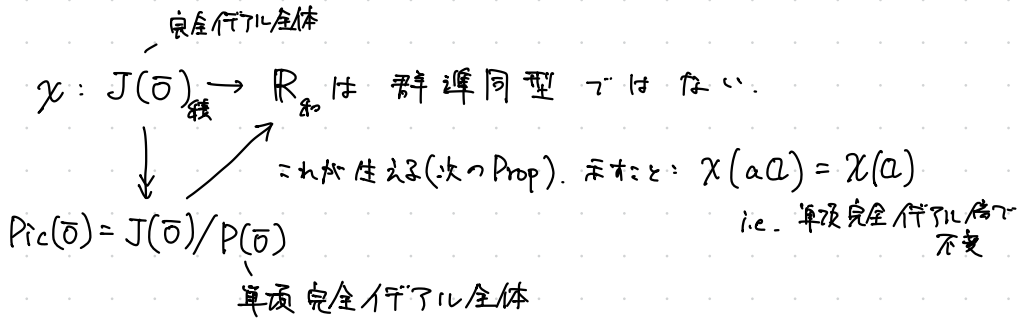
$a = a_f \cdot a_\infty$  :  $K$  の完全行렬に對し

$\chi(a) := -\log \text{vol}(a)$  を Euler-Minkowski 標数 といい.

$\therefore \text{vol}(a) = \underbrace{\chi(a_\infty)}_{\parallel} \text{vol}(a_f)$ .

$j: K \rightarrow K_{\mathbb{R}}$  による  $a_f$  の像は

$K_{\mathbb{R}}$  の完全格子なので、その基本領域の  $\text{vol}$ .



Remk.  $a = a_f \cdot a_\infty$   $\therefore a_\infty = \prod_{\mathbb{P}^1} v_i$  の  $\pm$

$$K \xrightarrow{j} K_{\mathbb{R}} = \begin{array}{ccc} \overline{K_{\mathbb{P}_1}} & \xrightarrow{\cdot e^{v_{\mathbb{P}_1}}} & \overline{K_{\mathbb{P}_1}} \\ \times & & \times \\ \overline{K_{\mathbb{P}_2}} & \xrightarrow{\cdot e^{v_{\mathbb{P}_2}}} & \overline{K_{\mathbb{P}_2}} \\ \times & & \times \\ \vdots & & \vdots \end{array} = K_{\mathbb{R}}$$

(  $v_i$  は  $\mathbb{P}^1$  の素点 )

$U_i$

$U_i$

$U_i$

$a_f$

$\rightarrow$

格子  $j a_f$

$\rightarrow$

格子  $j a$

$\downarrow \text{vol}$

$\downarrow \text{vol}$

$\text{vol}(a_f)$

$\chi(a_\infty) \text{vol}(a_f) =: \chi(a)$

Prop. 3.2.  $\chi$  は 単項完全行렬了ル格 $\tau$  不変.

prf.  $[a] = (a) \cdot [a]_\infty$  : 単項完全行렬了ル  
 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_f \cdot \mathcal{O}_\infty$  : 任意の完全行렬了ル

$$\rightarrow [a]\mathcal{O} = \underbrace{a\mathcal{O}_f}_{(1)} \cdot \underbrace{[a]_\infty\mathcal{O}_\infty}_{(2)}$$

(1)  $\text{vol}(a\mathcal{O}_f)$ .

$K_{\mathbb{R}} = \prod_{\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{p}}$  における格子として 各 $\mathfrak{p}$ 成分が  $|a|_{\mathfrak{p}}$  倍されるので  
 体積は  $\prod_{\mathfrak{p}} |a|_{\mathfrak{p}} = \mathcal{N}([a]_\infty)^{-1}$  倍される.

$$\rightarrow \text{vol}(a\mathcal{O}_f) = \mathcal{N}([a]_\infty)^{-1} \text{vol}(\mathcal{O}_f).$$

$$(2) \mathcal{N}([a]_\infty\mathcal{O}_\infty) \stackrel{\uparrow \text{isom}}{=} \mathcal{N}([a]_\infty) \mathcal{N}(\mathcal{O}_\infty).$$

$$\hookrightarrow (1)(2) \text{ より } \chi([a]\mathcal{O}) = \chi(\mathcal{O}).$$

Prop. 3.2.  
□

Prop. 3.3.  $\text{vol}(\mathcal{O}) = \sqrt{|d_K|} \mathcal{N}(\mathcal{O}).$

prf.

さきの prop に より 単項完全行렬了ル  $\mathcal{O}$  にかけても  $\text{vol}$  は 変わらないので.

$\mathcal{O}_f$  は 整行렬了ル (i.e.  $\mathcal{O}_f \subseteq \mathcal{O}_K$ ) としてよい.

すなわち  $\mathcal{O}_f$  部分  $\tau$ .

(5.2) Proposition. If  $\mathfrak{a} \neq 0$  is an ideal of  $\mathcal{O}_K$ , then  $\Gamma = \mathfrak{a}$  is a complete lattice in  $K_{\mathbb{R}}$ . Its fundamental mesh has volume

$$\text{vol}(\Gamma) = \sqrt{|d_K|} (\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}).$$

が 使 了.

Prop. 3.3.  
□

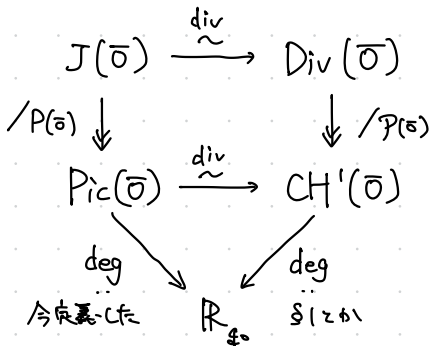
② 次数 deg の対応物は何？

Def.

$\alpha$  :  $K$  の 完全 1 元 には 対し.

$\deg(\alpha) := -\log \pi(\alpha) = \deg(\operatorname{div}(\alpha))$  を 次数 と いう.

III. §1. Prop. 1.13 に  
かいてある.



③  $\Rightarrow$  Riemann-Roch が たい なる ため

Prop. 3.4.  $\chi(\alpha) = \deg(\alpha) + \chi(0)$

prf.  $\chi(\alpha) = -\log(\sqrt{|dk|} \cdot \pi(\alpha)) \quad \because \text{Prop. 3.3.}$

$\deg \alpha = -\log \pi(\alpha) \quad \because \text{deg の def.}$

$\chi(0) = -\log \sqrt{|dk|} \quad \because \text{Prop. 3.3.}$

Prop. 3.4.  
□

補足: 次元  $\ell(D)$  について.

•  $\mathcal{O}_X(D)(X) \cong H^0(D)$  とかく ( $\because$  大域切断の0次元未関干  $R^0\Gamma = \Gamma$  の意)

$D$  が何極を許す/与え強制するときの  $X$  の有理関数全体

正確には,  $D = \sum_{P \in X} n_P \cdot P$  ( $n_P \in \mathbb{Z}$ ) なら

$$H^0(D) = \left\{ f: X \text{ 上の有理型関数} \mid \forall P \in X, \text{ord}_P(f) \geq -n_P \right\}$$

ある極値集合を  
除けば有理関数                      点  $P$  での位数  
与えらる. 極なら負

解釈: •  $n_P = 1$  なら,  $\text{ord}_P(f) \geq -1$  まで, つまり 1位の極まで許される.  
• 仮想的に,  $P$  で与極を  $n_P$  位で持つ関数  $g$  を用意すると

$$H^0(D) = \left\{ f: \text{有理型} \mid fg \text{ は } X \text{ 全体で定義される} \right\}$$

•  $\deg D = \sum n_P \in \mathbb{Z}$  が大きければ,  
より多くの有理型関数が許される.

•  $\ell(D) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}} H^0(D)$ :  $D$  が何極を許す/与え強制するときの  
有理型関数全体の次元.

(RR2 は  $\ell(D) = \deg(D) + (\text{補正})$  を主張しているのだった)

補足: 一般的に "次元" とは ... ?

次元  $\propto$   $\log$  個数.

$\because$   $n$  次元  $\mathbb{F}_q$ -線形空間  $V$  について  $\#V = q^n$  かつ

$$\dim V = \frac{1}{\log q} \log \#V.$$

$\leadsto$  個数も有限なら, 次元 = (底数)  $\log$  個数 となるのが自然.

② 次元  $d$  の 対応関数 を つくす.

Def.

$\alpha = \prod_p \varphi_p$  : 完全な理想  $\alpha$  に対応.

$$H^0(\alpha) := \left\{ f \in K^* \mid \forall_p, v_p(f) \geq v_p \right\}$$

と おく.

$\Rightarrow$  これは有限集合になる.

$$d(\alpha) := \log \frac{\# H^0(\alpha)}{\text{vol}(W)} \quad \text{と おく. } (\# H^0(\alpha) = 0 \text{ なら } d(\alpha) := 0)$$

$\Rightarrow$   $\text{vol}(W) = 2^r (2\pi)^s$ ,  $r = \# \text{実埋込}$ ,  $2s = \# \text{虚埋込}$  は定数.

\*  $H^0(\alpha)$  が有限集合になること

$\forall_p \nmid \infty, v_p(f) \geq v_p \text{ あり } H^0(\alpha) \subseteq \alpha_p \text{ あり } j H^0(\alpha) \subseteq j \alpha_p : \text{discrete}$

$\forall_p \mid \infty, v_p(f) \geq v_p \text{ あり } j H^0(\alpha) \subseteq \left\{ (x_j)_p \mid |x_j|_p \leq e^{-v_p f} \right\} : \text{bounded.}$   $\subseteq K_{\mathbb{R}}$ .

\*  $W$  は誰?

$$W = \left\{ (z_c)_c \in K_{\mathbb{R}} = \left[ \prod_c \mathbb{C} \right]^+ \mid |z_c| \leq 1 \right\} \quad \text{「一般に } \pi \text{ の意.} \text{」}$$

I. (5.3) の proof  $c_c \equiv 1$  と取る

Proof: The set  $X = \{(z_c) \in K_{\mathbb{R}} \mid |z_c| < c_c\}$  is centrally symmetric and convex. Its volume  $\text{vol}(X)$  can be computed via the map (5.1)

This gives

$$\text{vol}(X) = 2^s \text{vol}_{\text{Lebesgue}}(f(X)) = 2^s \prod_p (2c_p) \prod_{\sigma} (\pi c_{\sigma}^2) = 2^{r+s} \pi^s \prod_p c_p$$

より  $\text{vol}(W) = 2^{r+s} \pi^s$ .

Rmk.  $\alpha = 0$  と取る.  $H^0(0) = \mu(K)$ .

$$\begin{aligned} \therefore f \in H^0(0) &\Leftrightarrow \forall_p, |f|_p \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \forall_p, |f|_p = 1. \quad \left( \prod_p |f|_p = 1 \right) \end{aligned}$$

$\mu(K) \subseteq H^0(0)$  は明らか.  $\uparrow$  あり  $H^0(0)$  は有限群  $\Gamma$  の  $\Gamma \cdot H^0(0) \subseteq \mu(K)$ .

① 種数  $g$  の対応物をつくる

Def. 3.5.

$$g = \ell(0) - \chi(0) = \log \frac{\#M(K) \sqrt{|d_K|}}{2^r (2\pi)^s} \quad \Sigma \text{ 種数 と いふ.}$$

② Riemann-Roch 1 の類似を述べる.

Prop. 3.6.  $\chi(a) = \deg(a) + \ell(0) - g$

cf.  $\chi(D) = \deg(D) + 1 - g$  (Riemann 面)

① Serre duality の類似.

② 特殊指数の導入

③ RR2 の類似.

$$r = \# \text{実埋込}, \quad 2s = \# \text{虚埋込}, \quad n = [k: \mathbb{Q}]$$

Thm. 3.7 (S. LANG)  $\alpha$ : 完全な代数体に対し

$$\# H^0(\alpha^{-1}) = \frac{2^r (2\pi)^s}{\sqrt{|dk|}} \chi(\alpha) + O(\chi(\alpha)^{1-\frac{1}{n}}) \quad (\chi(\alpha) \rightarrow \infty)$$

次元の話にするために  $\log \chi \geq 3\epsilon$ .

証明はあとまわし

$$\log \frac{\# H^0(\alpha^{-1})}{2^r (2\pi)^s} = \log \chi(\alpha) - \log \sqrt{|dk|} + O(\chi(\alpha)^{-\frac{1}{n}})$$

||                    ||

$$\alpha^{-1} = \mathcal{O}(D) \text{ と } \chi \geq 3\epsilon \quad -\log \chi(\mathcal{O}(D)) \quad \chi(\mathcal{O}) \quad l(D) - \chi(D)$$

Thm. 3.9.

$$l(D) = \deg(D) + \chi(\mathcal{O}) - g + \underbrace{i(D)}_{\text{特殊指数}}, \quad i(D) = O(e^{-\frac{1}{n} \deg D})$$

$D$  に依存しない定数  $\deg D \rightarrow \infty \Rightarrow i(D) \rightarrow 0$ .

$$\text{cf. } l(D) = \deg D + 1 - g + \underbrace{l(k-D)}_{\text{Riemann 定理}} \quad (= t \neq \deg D \rightarrow \infty \Rightarrow \text{消滅})$$

↑ 式自体は RR2 から出てくるが、

$\mathcal{O}$  に漸近する部分と分離して  $l(D)$  を表したのが俵の式.

3.7 のために補題を用意する.

Lemma 3.8.

$a_1, \dots, a_h : \text{Pic}(O)$  の代表系を必ず全数行とした

有限部分  $\text{Pic}(O)$  ではない

$\exists c,$

$$\mathcal{A}_i := \left\{ a = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}} \mid \begin{array}{l} a_f = a_i \\ \gamma_{\mathfrak{p}}(a) \leq c \gamma_{\mathfrak{p}}(a_i)^{f_{\mathfrak{p}/n}} \text{ for } \mathfrak{p} \mid \infty \end{array} \right\} \text{ としたとき}$$

有限部分  $a_i$  と一致

無限部分の大きさは  $c$  まで大きくない

$$J(O) = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{A}_i P(O)$$

単項完全行とした  $\mathcal{A}_i$  で  $\Gamma$  だけ完全行とした全体を覆える。

prf.

①  $\mathcal{B}_i := \{ a \in J(O) \mid a_f = a_i \}$  とおく。

$\rightarrow J(O) = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{B}_i P(O) \neq \emptyset$ .  $\left( \begin{array}{l} \because b \in J(O) \text{ を取り. } b_f = a_i \cdot (a) \text{ とする} \\ b = a_i \cdot b_{\infty} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(b)} \cdot (a) \in P(O) \end{array} \right)$

$i \in \{1, \dots, h\}$  且  $f_{\mathfrak{p}} \leq c \gamma_{\mathfrak{p}}(a_i)^{f_{\mathfrak{p}/n}}$   $\Rightarrow$   $c \geq \frac{f_{\mathfrak{p}}}{\gamma_{\mathfrak{p}}(a_i)^{f_{\mathfrak{p}/n}}}$ .  $i=1, \dots, h$  での  $\max$  を取ればよい。

②  $\prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathbb{R}$

$U$ : 部分  $\mathbb{R}$ -Vect

$H = \{ (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mid \sum x_{\mathfrak{p}} = 0 \}$ : trace-zero 超平面

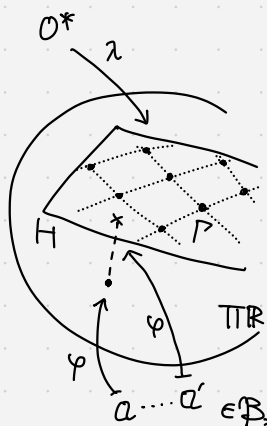
$U$ : I.(2.3) より 完全格子

$\Gamma = \lambda(O^*)$ : complete unit lattice

$\Rightarrow \lambda: O^* \xrightarrow{N} [\text{norm-1 曲面}] \xrightarrow{\lambda} [\text{trace-0 平面}]$

具体的には;  $u \mapsto (-f_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}}(u))_{\mathfrak{p} \mid \infty}$  と取り、

$\exists$  完全格子 なる  $\gamma$ :  $\sup_{x \in H} \inf_{y \in \Gamma} \max_{\mathfrak{p} \mid \infty} \frac{|x_{\mathfrak{p}} - y_{\mathfrak{p}}|}{f_{\mathfrak{p}}} =: C_0 < \infty$ .  $\left( \begin{array}{l} \text{図} \\ \text{H} \end{array} \right)$   $\leftarrow$  本質



I. §7 の内容

③ 写像  $\varphi: \mathcal{B}_i \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathbb{R}$  を  $a_i \prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}}$   $\mapsto (f_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid \infty}$  と定めた。

$a = a_i a_{\infty} \in \mathcal{B}_i$  とき  $a' := a \gamma_{\mathfrak{p}}(a_{\infty})^{-1/n}$  は  $\varphi(a') \in H$  と定めた。

$\left( \because \prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}}(a') = \prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(a) - \frac{1}{n} \sum_{\mathfrak{q} \mid \infty} f_{\mathfrak{q}} v_{\mathfrak{q}}(a)} \neq 1 \text{ かつ } \sum v_{\mathfrak{p}}(a') = 0 \right)$

$\rightarrow$  ③ によりある  $u \in O^*$  があ  $\forall \mathfrak{p} \mid \infty, |\varphi(a')_{\mathfrak{p}} - \lambda(u)_{\mathfrak{p}}| \leq f_{\mathfrak{p}} C_0$ .  $\dots$  (7)

i.e.  $v_{\mathfrak{p}}(a) - v_{\mathfrak{p}}(u) = v_{\mathfrak{p}}(a') \leq \frac{1}{n} \log \gamma_{\mathfrak{p}}(a_{\infty}) + C_0 = \frac{1}{n} \log \gamma_{\mathfrak{p}}(a) + C_1$ ,  $(C_1 := C_0 - \frac{1}{n} \log \gamma_{\mathfrak{p}}(a_{\infty}))$

$b = a \cdot [u^{-1}] = \prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}}$  とおくと、有限部分  $(u^{-1}) = (1)$  により  $a_f = a_i$  のまま。

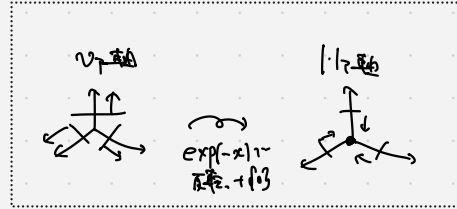
$\bullet$  無限部分  $\gamma_{\mathfrak{p}}(a')^{f_{\mathfrak{p}}} = (e^{f_{\mathfrak{p}}})^{v_{\mathfrak{p}} - v_{\mathfrak{p}}(u)} \leq e^{\frac{f_{\mathfrak{p}}}{n} (\log \gamma_{\mathfrak{p}}(a) + f_{\mathfrak{p}} C_1)} \leq e^{nc_1} \gamma_{\mathfrak{p}}(a)^{f_{\mathfrak{p}/n}} =: c$

prf. (3.7)

①  $\sigma^{-1}$  は  $\Gamma$  を引きこむ変換である。

$$\begin{aligned} H^0(\sigma^{-1}) &= \left\{ f \in K^* \mid v_\gamma(f) \geq v_\gamma \text{ for } \gamma \right\} \\ &= \left\{ f \in \sigma^{-1}\Gamma^* \mid v_\gamma(f) \geq v_\gamma \text{ for } \gamma \in \infty \right\} \end{aligned}$$

$\gamma$  は  $f$  の



$$\overline{H^0}(\sigma^{-1}) := \left\{ f \in \sigma^{-1}\Gamma^* \mid |f|_\gamma \leq \rho(\gamma)^{v_\gamma} \text{ for } \gamma \in \infty \right\} = H^0(\sigma) \cup \{0\} \quad (2.2.2)$$

$$\left| \#\overline{H^0}(\sigma^{-1}) - \frac{2r(2\pi)^s}{\sqrt{|d_K|}} \rho(\sigma) \right| \leq C \rho(\sigma)^{1-\frac{1}{n}} \quad \text{for all } \sigma \in J(\mathfrak{o}) \text{ s.t. } \rho(\sigma) \geq C'$$

存在定数  $C, C'$  を与えたい。 (最終目標)

②  $\#\overline{H^0}(\cdot)$  は 単行行列  $P(\sigma)$  倍で不変。 ( $\because \overline{H^0}(\sigma^{-1}) \rightarrow \overline{H^0}(\sigma)\sigma^{-1}$  は bij. ;  $x \mapsto \sigma x$ )

$\rightarrow$   $\pm$  の補題  $J(\mathfrak{o}) = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{A}_i P(\sigma)$  より。 各  $\mathcal{A}_i$  の元  $\gamma$  について示せばよい。

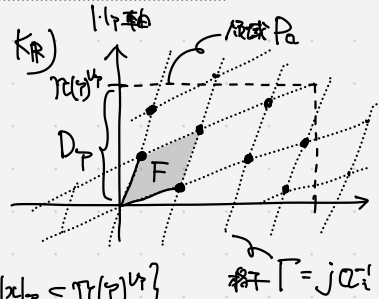
$$\mathcal{A}_i = \left\{ \sigma = \prod_{\gamma \in \infty} \gamma \mid v_\gamma(\sigma) = v_\gamma, \rho(\gamma)^{v_\gamma} \leq C \rho(\sigma)^{v_\gamma/n} \text{ for } \gamma \in \infty \right\}$$

思いつく

③  $\sigma = \sigma_i \sigma_\infty \in \mathcal{A}_i$  なる。

①+②

$$\begin{aligned} \overline{H^0}(\sigma^{-1}) &= \left\{ f \in \sigma^{-1}\Gamma^* \mid |f|_\gamma \leq \rho(\gamma)^{v_\gamma} \text{ for } \gamma \in \infty \right\} \\ &= \underbrace{j\sigma^{-1}}_{\subseteq K_\mathbb{R} \text{ の格子}} \cap \underbrace{P_\sigma}_{\text{領域}} \\ &\quad \underbrace{\Gamma}_{\Gamma \text{ の格子}} \quad \underbrace{= \prod_{\gamma \in \infty} D_\gamma}_{\substack{\text{領域} \\ \text{w/ } D_\gamma = \{x \in K_\mathbb{R} \mid |x|_\gamma \leq \rho(\gamma)^{v_\gamma}\}}} \end{aligned}$$

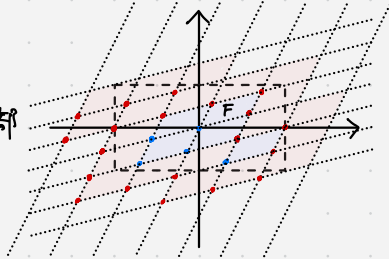


$\rightarrow$  領域  $P_\sigma \cap$  格子  $\Gamma$  の個数を調べればよい。

$\sigma$  によらずに、代表元  $\sigma_1, \dots, \sigma_h$  を定めた時点を固定。

$\Gamma$  の基本領域を  $F$  とおく。

$$\begin{aligned} \text{④ } X &= \{ \gamma \in \Gamma \mid (F+\gamma) \cap P_a \neq \emptyset \} \dots \\ Y &= \{ \gamma \in \Gamma \mid F+\gamma \subseteq P_a^\circ \} \dots P_a^\circ: P_a \text{ の内部} \\ X \setminus Y &= \{ \gamma \in \Gamma \mid (F+\gamma) \cap \partial P_a \neq \emptyset \} \dots \end{aligned}$$



- ○  $Y \subseteq \Gamma \cap P_a = \bar{H}^0(Q^1) \subseteq X \dots$
- $\bigcup_{\gamma \in Y} (F+\gamma) \subseteq P_a \subseteq \bigcup_{\gamma \in X} (F+\gamma)$
- ○  $\# Y \leq \# \bar{H}^0(Q^1) \leq \# X$
- $\# Y \text{ vol } F \leq \text{vol}(P_a) \leq \# X \text{ vol } F$

$$\hookrightarrow \left| \# \bar{H}^0(Q^1) - \frac{\text{vol}(P_a)}{\text{vol}(F)} \right| \leq \# X - \# Y = \#(X \setminus Y)$$

$$\text{⑤ } \circ^T \text{vol}(P_a) = 2^r (2\pi)^s \mathcal{N}(a_\infty) \quad (\text{I. (5.3) prf 参照.})$$

$$\circ^1 \text{vol}(F) = \sqrt{|d_K|} \mathcal{N}(a_F^1) \quad (\text{Prop. 3.3})$$

$$\text{⑥ } \left| \# \bar{H}^0(Q^1) - \frac{2^r (2\pi)^s}{\sqrt{|d_K|}} \mathcal{N}(a) \right| \leq \#(X \setminus Y)$$

最終目標の左辺側が出た。  $n^2$ 、目標を書き直す。

$$\text{WTS: } \exists c, c', \#(X \setminus Y) = \#\{ \gamma \in \Gamma \mid (F+\gamma) \cap \partial P_a \neq \emptyset \} \leq c \mathcal{N}(a)^{1-\frac{1}{n}} \quad \forall \mathcal{N}(a) \geq c'$$

実は  $c' = 1$  かつ  $c$  を今から見つける。

$$\text{⑦ } \alpha_p := \mathcal{N}(p)^{1/n}, \quad I = [0, 1] \text{ とおす.}$$

$$\begin{aligned} \varphi: I^n &= \prod_{p:\text{real}} I \times \prod_{p:\text{complex}} (I \times I) \longrightarrow \prod_{p:\text{real}} D_p \times \prod_{p:\text{complex}} D_p = P_a \\ (t_p)_p, (p_p, \theta_p) &\longmapsto (2\alpha_p(t_p - \frac{1}{2})), (\sqrt{\alpha_p} \rho(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)) \\ \begin{matrix} | I \\ \circ \end{matrix} & \quad \begin{matrix} \rho \\ \circ \\ \theta \end{matrix} & \quad \begin{matrix} \alpha_p \\ | \\ -\alpha_p \end{matrix} & \quad \left. \begin{matrix} \text{同心円} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \sqrt{\alpha_p} \end{aligned}$$

8) 逆ポート:  $\|d\psi(x)\|$  をよから抑えて平均値の定理(多変数)を使う.

$\forall x \in I^n,$

$$|\psi \text{ の } \gamma \text{ 成分の係数}| \leq \begin{cases} 2\alpha_\gamma & (\gamma: \text{real}, \gamma \neq 1) \text{ } f_\gamma = 1 \text{ の場合} \\ 2\pi\sqrt{\alpha_\gamma} & (\gamma: \text{complex}, \gamma \neq 1) \text{ } f_\gamma = 2 \text{ の場合} \end{cases}$$

$$\leadsto \|d\psi(x)\| \leq 2\pi n \max \alpha_\gamma^{1/2} \leq c_1 \mathcal{N}(a)^{1/n} \quad (c_1 = 2\pi n c)$$

$$\alpha_\gamma = \mathcal{N}(\gamma)^{f_\gamma} \leq c \mathcal{N}(a)^{f_\gamma/n}$$

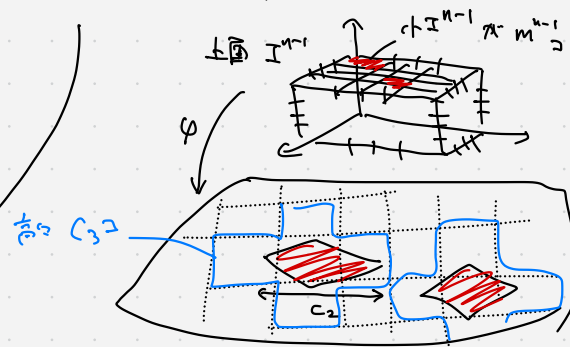
$\leadsto$  平均値の定理(多変数)によれば

$\forall x, y, \exists c \in (a, b),$

(\*)  $\|\psi(x) - \psi(y)\| = \|d\psi(c)\| \|x - y\| \leq c_1 \mathcal{N}(a)^{1/n} \|x - y\|$

9)  $I^n \xrightarrow{\psi} P_a$   
 $\cup \quad \cup$   
 $\exists \bigcup_{fin} I^{n-1} \xrightarrow{\psi} \partial P_a$

各辺を  $m = \lfloor \mathcal{N}(a)^{1/n} \rfloor$  コに分割し、  
 $I^{n-1}$  を  $m^{n-1}$  コに等分する。  
 各小  $I^{n-1}$  の直径は  $\frac{\sqrt{n-1}}{m}$ .



8)より  $\psi(\text{小 } I^{n-1})$  の直径  $\leq \frac{\sqrt{n-1}}{m} \cdot c_1 \mathcal{N}(a)^{1/n} \stackrel{2}{=} m \text{ and def}$   
 $\leq \frac{\sqrt{n-1}}{m} \cdot c_1 (m+1) \leq \sqrt{n-1} \cdot c_1 \cdot 2 =: C_2$

$C_3 := \sup_{x: \text{直径} \leq C_2} \# \{ \gamma \in P \mid (F+\gamma) \cap X \neq \emptyset \}$

よって  $C_2$  の  $\psi(\text{小 } I^{n-1})$  は高さ  $C_3$  コの  $(F+\gamma)$  と交わる。

$\psi(I^{n-1}) = \bigcup_{m^{n-1}} \psi(\text{小 } I^{n-1})$  より  $\psi(I^{n-1})$  は  $C_3 m^{n-1} = C_3 \lfloor \mathcal{N}(a)^{1/n} \rfloor^{n-1} \leq C_3 \mathcal{N}(a)^{1-n}$  コの  $(F+\gamma)$  と交わる。

$\partial P_a$  は最大  $2^n$  コの  $\mathbb{R}^n$  ...  $I^{n-1}$  が ...

$\# \{ \gamma \in P \mid (F+\gamma) \cap \partial P_a \neq \emptyset \} \leq \frac{2^n C_3 \mathcal{N}(a)^{1-n}}{=: C}$

Thm. 3.9

補足: 標準束 (canonical bundle)  $\omega_X$   
 // 因子 (divisor)  $K_X$

$X$ : Riemann 面  $\hookrightarrow \mathbb{C}$

$\omega_X := T^*X$ : 余接束

(一般に  $n$ -次元  $\mathbb{C}$  上の  $\mathbb{A}^n$  上の  $T^*X$ )

$\omega_X$  に対応する因子を  $K_X$ : 標準因子という

Thm. (Serre duality)  $Z$ :  $X$  上の  $n$ -点の束

$$H^0(X, Z) \cong H^1(X, \omega_X \otimes Z^\vee)^\vee$$

$\hookrightarrow$  dualizing object

RR の見方:  $Z$  に対応する因子を  $D$  とする.

$$\chi(D) = \dim H^0(X, Z) - \dim H^1(X, Z)$$

定義

$\parallel$

?  $\sim$

$\parallel$  SD

$= RR2$

$$\dim H^0(X, Z) - \dim H^0(X, \omega_X \otimes Z^\vee)$$

$\parallel$

$\parallel$  R

$\parallel$

$\deg D + 1 - g$

$$\ell(D) - \ell(K - D)$$

$\parallel$

$\parallel$

$\parallel$

$= RR1$

( $Z$  に対応する因子は  $-D$  に相当する)

補足: Riemann-Hurwitz の公式

$f: Y \rightarrow X$ : Riemann 面の  $n$ -次 (分岐) 被覆  $\hookrightarrow \mathbb{C}$

Thm (Riemann-Hurwitz の公式)

$$2g_Y - 2 = n(2g_X - 2) + \sum_P (e_P - 1)$$

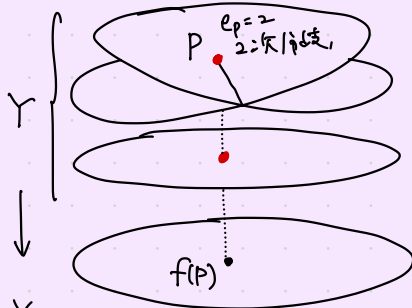
w/  $e_P$ :  $P$  での分岐指数

有限点を除き  $e_P = 1$ .

$n=3$ -次分岐被覆

$f$

$X$



3次元  $\mathbb{C}$  上の  $f$  の特異点  $P$  での分岐指数  $e_P = 2$  (2次分岐) である。

① 標準束  $\omega$  の対応物をつくる.

Def. 3.10

$$\omega_K = \mathcal{E}_{K/\mathbb{Q}} \cong \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) \quad \text{は標準加群 である.}$$

Prop. 3.11       $\omega_L = \mathcal{E}_{L/K} \omega_K$

Prop. 3.12       $\deg \omega_K = -2 \chi(0) = 2g - 2 \mathcal{L}(0)$   
cf.       $\deg \omega_L = 2g - 2$       (Riemann  $\bar{\mathbb{R}}$ )

② Riemann-Hurwitz の公式の類似.

Prop. 3.13       $L/K$ :  $n$  次 (1 分岐 2 もよい) 拡大

$$g_L - \mathcal{L}(0_L) = n (g_K - \mathcal{L}(0_K)) + \frac{1}{2} \deg \mathcal{E}_{L/K}$$

特に  $L/K$ : 不分岐 ならば

$$\chi(0_L) = n \chi(0_K)$$

cf.  $f: Y \rightarrow X$ :  $n$  次 (1 分岐 2 もよい) 被覆射.

$$g_Y - 1 = n (g_X - 1) + \frac{1}{2} \sum_p (e_p - 1)$$

$p$ :  $n$  分岐指数

$f$  が 不分岐 ならば

$$\chi(Y) = n \chi(X) \quad (\text{Riemann } \bar{\mathbb{R}})$$

